Curso 2015-2016 **Cálculo II** Grado M+I

Primer Parcial - 8 de abril 2016

Teoría. *(1.5 puntos)* | Nota: /1.5 |

1. Definición de diferenciabilidad de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $(a, b) \in \overset{\circ}{D}$

2. Definición de de la matriz jacobiana de una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en el punto $\overline{a} \in \overset{\circ}{D}$.

3. Sea $\overline{f}(x, y) = (\sqrt{3x^2 - y},\ x^2 \sin \dfrac{\pi}{x - 1 + y})$, calcula la matriz jacobiana de $\overline{f}$ en el punto $(1, 2)$.

   Solución. Las funciones componentes son diferenciables en $(1, 2) \in Dom(\overline{f})$ y las parciales serán

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - y}} \quad \to \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2) = 3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{3x^2 - y}} \quad \to \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 2) = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x \sin \frac{\pi}{x - 1 + y} - \frac{\pi}{(x - 1 + y)^2} \cos(\frac{\pi}{x - 1 + y}) \quad \to \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 2) = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{-x^2\pi}{(x - 1 + y)^2} \cos(\frac{\pi}{x - 1 + y}) \quad \to \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2) = 0$$

   Por lo que la matriz Jacobiana de $\overline{f}$ en $(1, 2)$ es:

$$J(\overline{f})(1, 2) = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuestiones. *(2 puntos)*

Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es. | Nota: /2 |

1. Se $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto que tiene como frontera el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Entonces A es cerrado. ☐ Si ☒ No

   Solución. Por ejemplo la bola abierta de centro cero y radio 1 cumple que no es cerrado y su frontera es la dada.

2. Si el punto $(1, 2)$ es un punto interior de un conjunto A de $\mathbb{R}^2$ y de un conjunto B de $\mathbb{R}^2$, entonces $(1, 2)$ es un punto interior de $A \cap B$. $\boxed{\text{X}}$ Si $\boxed{}$ No

   Solución. Puesto que $(1, 2)$ es un punto interior del conjunto A existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(2, 1) \subset A$; por otra parte, como $(1, 2)$ es un punto interior del conjunto B existe $r_2 > 0$ tal que $B_{r_2}(2, 1) \subset B$, por lo tanto si consideramos $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$ se tiene que: $B_r(2, 1) \subset A \cap B$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Consideramos las curvas de nivel uno y cero, C_1 y C_0 respectivamente. Entonces, se tiene que $C_1 \bigcap C_0 = \emptyset$. $\boxed{\text{X}}$ Si $\boxed{}$ No

   Solución. Puesto que

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \quad \text{y} \quad C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 1\},$$

   si $C_1 \bigcap C_0 \neq \emptyset$, habría un punto (a, b) con $f(a, b) = 0$ y $f(a, b) = 1$.

4. Si $f(x, y)$ es una función continua en $C = [3, 4] \times [5, 6]$ entonces f alcanza el máximo y el mínimo absoluto en el conjunto C. $\boxed{\text{X}}$ Si $\boxed{}$ No

   Solución. Puesto que f es continua y el conjunto $C = [3, 4] \times [5, 6]$ es compacto, ya que es cerrado y acotado, entonces por el teorema de Weierstrass se tiene que la función f alcanza el máximo y el mínimo absoluto sobre el conjunto C en puntos de C.

Problemas. *(6.5 puntos)*

1. *(1 punto)* Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \bigcap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)^2 = 1\}$. Nota: /1

   i) Representa A y calcula $\overset{\circ}{A}, Fr(A), Is(A), \overline{A}, A'$.

   ii) Indica si es abierto, si es cerrado, si es compacto y si es acotado.

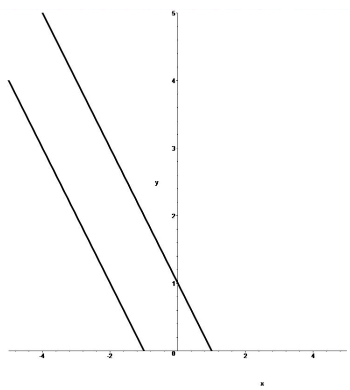
Solución.

El conjunto A viene dado por la intersección de dos rectas con $y \geq 0$, por lo que será las dos semi-rectas de la figura.

$\overset{\circ}{A} = \emptyset$ $\quad Fr(A) = A$ $\quad Is(A) = \emptyset$

$A' = A$ $\quad \overline{A} = A$

abierto	cerrado	acotado	compacto
No	Si	No	No



2. *(1 punto)* Estudia la existencia de los siguientes límites: Nota: /1

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+y+1)}{(x+y)^2-1}$.

Solución. Utilizando la equivalencia $\operatorname{sen}(x+y+1) \sim x+y+1$ si $(x,y) \to (-1,0)$ se tiene que:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+y+1)}{(x+y)^2-1} = \lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{x+y+1}{(x+y)^2-1} = \lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{1}{x+y-1} = \frac{-1}{2}.$$

ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^{5/4}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

Solución. Estudiamos el límite mediante el paso a coordenadas polares $x = \rho\cos(\theta)$ y $y = \rho\sin(\theta)$. Fijamos $\theta \in [0, 2\pi)$ y tenemos que:

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos(\theta) + \rho^{5/4}\sin^{5/4}(\theta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos(\theta) + \rho^{1/4}\sin^{5/4}(\theta) = \cos(\theta).$$

Puesto que este límite depende de θ el límite doble no existe.

3. *(2 puntos)* Dada $f(x,y) = \begin{cases} x^2\,\dfrac{x+2y+2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ Se pide: Nota: /2

i) Continuidad de f en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua?

Solución. La función es continua en (x,y) tal que$y \neq 0$, por ser producto y cociente (con denominador no nulo) de continuas. Veamos si es continua en $(0,0)$, calculando el límite pasando a polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\,\frac{x+2y+2}{y} \to \lim_{\rho\to 0} \rho^2\cos^2\theta \frac{\rho\cos\theta + 2\rho\operatorname{sen}\theta + 2}{\rho\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\theta \frac{\rho\cos\theta + 2\rho\operatorname{sen}\theta + 2}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para valores fijos del ángulo con $\theta \neq 0$ el límite anterior valdría cero. Sin embargo, si $\theta \to 0$ no es acotado. Veamos que el límite no existe tomando el camino $y = x^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, y=x^2} x^2\,\frac{x+2y+2}{y} = \lim_{x\to 0} x^2\,\frac{x+2x^2+2}{x^2} = \lim_{x\to 0}(x+2x^2+2) = 2.$$

Por tanto,f no es continua en $(0,0)$.
Veamos qué sucede en $(1,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\,\frac{x+2y+2}{y} = \pm\infty.$$

Análogamente ocurrirá en los puntos de la forma $(x,0)$ para $x \neq 0$, salvo en el punto $(-2,0)$ que queda una indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Pasando a polares ($x = -2 + \rho\cos\theta$; $y = \rho + \operatorname{sen}\theta$):

$$\lim_{\rho\to 0}(-2+\rho\cos\theta)^2\,\frac{-2+\rho\cos\theta + 2\rho\operatorname{sen}\theta + 2}{\rho\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}(-2+\rho\cos\theta)^2\ \frac{\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} = (-2)^2\ \frac{\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} == 4\ \frac{\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

por lo que al depender del ángulo, no existe el límite y se tiene que f **no es continua en los puntos de la forma** $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ **con** $y\neq 0$**.**

ii) Estudia en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f diferenciable.

Solución. La función f **es diferenciable en** (x,y) **tal que** $y\neq 0$, por ser producto y cociente (con denominador no nulo) de funciones diferenciables. Además, solo es diferenciable en estos puntos ya que en el resto no es continua.

iii) Estudia si existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Solución. Veamos si existen las parciales por la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$

iv) Derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección de $\overline{v}=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$.

Solución. Como f no es diferenciable en $(0,0)$, debemos calcular la derivada direccional por la definición:

$$D_{\overline{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\overline{v})-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{t}{\sqrt{5}},\frac{2t}{\sqrt{5}})-f(0,0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2\ \dfrac{\frac{t}{\sqrt{5}}+2\frac{2t}{\sqrt{5}}+2}{t}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{5}\ (\frac{t}{\sqrt{5}}+2\frac{2t}{\sqrt{5}}+2) = \frac{2}{5}$$

4. (*1.5 puntos*) Sea $f(x,y)=(x^4+y^4)\ln(1+x^2+y^2)$.

Nota: /1.5

i) Calcula las funciones derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Justifica si la función f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ y si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Las funciones derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3\ln(1+x^2+y^2)+\frac{2x(x^4+y^4)}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3\ln(1+x^2+y^2)+\frac{2y(x^4+y^4)}{1+x^2+y^2}$$

que son continuas en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, la f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ y por tanto diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

ii) Calcula la derivada direccional de f en $(0,1)$ según el vector $(-1,-1)$.

Solución. Puesto que f es diferenciable en $(0,1)$, para calcular la derivada direccional según el vector $(-1,-1)$, normalizamos el vector obteniendo la dirección $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ y aplicamos la fórmula $D_{(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 4\ln(2) + 1,$$

se tiene

$$D_{(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})} f(0,1) = (0, \ln 2 + 1) \cdot (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = -\frac{4\ln 2 + 1}{\sqrt{2}}.$$

iii) Calcula la dirección en la que la derivada direccional de f en $(0,1)$ es máxima y el valor de dicha derivada direccional.

Solución. Puesto que f es diferenciable en $(0,1)$ y $\nabla f(0,1) \neq (0,0)$ la derivada direccional es máxima en la dirección y sentido del vector gradiente:
$\nabla f(0,1) = (0, 4\ln 2 + 1)$ que es la dirección $(0,1)$.
El valor máximo es la norma del gradiente:
$\|\nabla f(0,1)\| = \|(0, 4\ln 2 + 1)\| = 4\ln 2 + 1$.

5. (*1 punto*) Calcula el plano tangente y el vector normal en el punto $(1,1,0)$ a la superficie S dada por $S = \{(x,y,z) : xe^{(x^2+y^2)z} + x^2 - yz - 2y = 0\}$. | Nota: /1 |

Solución. La superficie S es una superficie de nivel de la función

$$f(x,y,z) = xe^{(x^2+y^2)z} + x^2 - yz - 2y,$$

que es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$.

El punto $(1,1,0) \in S$ y puesto que $\nabla f(1,1,0) = (3,-2,1) \neq (0,0,0)$ se tiene que este vector es normal a S y la recta normal será la recta que pasa por $(1,1,0)$ y tiene por vector director $\nabla f(1,1,0)$, es decir,

$$L = \{(x,y,z) = (1,1,0) + t(3,-2,1), t \in \mathbb{R}\}.$$

Y el plano tangente a S en $(1,1,0)$ es:

$$3(x-1) - 2(y-1) + z = 0.$$